Espaces euclidiens, formes bilinéaires et quadratiques

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Norme Euclidienne

Dans ces exercices, les normes considérées sont des normes euclidiennes.

Exercice 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Démontrer que deux vecteurs u et v de E qui satisfont $\|u - v\| = \|u + v\|$ sont orthogonaux.

Exercice 2. Soit u un vecteur d'un espace euclidien E. Déterminer l'ensemble $\{x \in E \mid \langle x, x - u \rangle = 0\}$. *Indication : faire un dessin dans le cas $E = \mathbb{R}^2$.*

Exercice 3. (Inversion) Soit E un espace vectoriel euclidien. On définit l'application : $i(u) = \begin{cases} \frac{u}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que i est une involution (*i.e.* $i(i(u)) = u$ pour tout $u \in E \setminus \{0\}$) et déterminer les points fixes de i (*i.e.* les $u \in E$ tels que $i(u) = u$).
2. Vérifier que pour tout $u, v \in E \setminus \{0\}$ on a $\|i(u) - i(v)\| = \frac{\|u-v\|}{\|u\|\|v\|}$.
3. On considère le cas où $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer l'image par i :
   (a) d'une droite qui passe par 0.
   (b) d'un cercle passant par 0,
   (c) d'une droite affine ne passant pas par 0,

2 Formes quadratiques

Dans tous les exercices de cette partie, on précisera le signe (positif, négatif ou aucun des deux) de chaque forme quadratique.

Exercice 4. Mettre les formes quadratiques suivantes sous forme de sommes et de différences de carrés de formes linéaires indépendantes :

1. $q(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$
2. $q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$
3. $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$

Exercice 5. Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont sous forme de sommes et de différences de carrés de formes linéaires indépendantes (sinon les y mettre) :

1. $q(x, y) = 9\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-3y}{2}\right)^2$
2. $q(x, y, z) = (x - 6y + 4z)^2 - (y - 4z)^2 + 2z^2$
3. $q(x, y) = (x + y)^2 - (x - y)^2 + x^2 + 2y^2$
4. $q(x, y, z) = (x + y + z)^2 + (-x + y + z)^2 - x^2$

Exercice 6.* Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont définies et positives

1. $q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
2. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. (Décomposition dans différentes bases) Soit la forme quadratique $q(x_1, x_2) = 3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2$ définie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On note A la matrice de q dans la base canonique.

1. Vérifier que $a = (1, 1)\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = (1, -1)\frac{1}{\sqrt{2}}$ sont des vecteurs propres de A et qu'ils forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Écrire alors q sous forme de sommes et de différences de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. En utilisant l'algorithme de Gauss : mettre q sous forme de sommes et de différences de carrés de formes linéaires indépendantes et écrire cette décomposition sous forme matricielle
3. En utilisant les deux questions précédentes, trouver d'autres représentations en sommes et différences de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 8.* Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\phi(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

1. Vérifier que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
2. Soit $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$. Calculer
$$e_1 = \frac{i}{\|i\|}, \quad e_2 = \frac{j - \phi(e_1, j)e_1}{\|j - \phi(e_1, j)e_1\|}, \quad e_3 = \frac{k - \phi(e_1, k)e_1 - \phi(e_2, k)e_2}{\|k - \phi(e_1, k)e_1 - \phi(e_2, k)e_2\|}$$
3. Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale pour ϕ.
4. Déterminer (sans calcul) la matrice de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3).

3 Pour aller plus loin

Exercice 9.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n > 2$. La forme bilinéaire dont la matrice est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 2(n-1) \end{pmatrix}$$

est-elle positive ? définie ?

Exercice 10.* (Identité du parallélogramme) Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in E^2, \ \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

On se propose de démontrer qu'une telle norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. On définit sur E^2 une application f par :

$$\forall (u, v) \in E^2, \ f(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

1. Montrer que pour tout (u, v, w) de E^3, on a : $f(u + w, v) + f(u - w, v) = 2f(u, v)$.
2. Montrer que pour tout (u, v) de E^2, on a : $f(2u, v) = 2f(u, v)$.
3. Montrer que pour tout (u, v) de E^2 et tout rationnel r, on a : $f(ru, v) = rf(u, v)$.
   On admettra que pour tout réel λ et tout (u, v) de E^2 on a : $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$ (ce résultat provient de la continuité de f).
4. Montrer que pour tout (u, v, w) de E^3, $f(u, w) + f(v, w) = f(u + v, w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.